

2017 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（三）试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0 \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 x 连续，则

- (A) $ab = \frac{1}{2}$. (B) $ab = -\frac{1}{2}$. (C) $ab = 0$. (D) $ab = 2$.

【答案】A

(2) 二元函数 $Z = XY(3 - X - Y)$ 的极值点

- (A) $(0, 0)$. (B) $(0, 3)$. (C) $(3, 0)$. (D) $(1, 1)$.

【答案】D

(3) 设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x) > 0$ 则

- (A) $f(1) > f(-1)$. (B) $f(1) < f(-1)$.
(C) $|f(1)| > |f(-1)|$. (D) $|f(1)| < |f(-1)|$.

【答案】C

(4) 若级数 $\sum_{n=2}^{\infty} [\sin \frac{1}{n} - k \ln(1 - \frac{1}{n})]$ 收敛，则 $k =$

- (A) 1. (B) 2. (C) -1. (D) -2.

【答案】C

(5) 设 α 为 n 维单位列向量， E 为 n 阶单位矩阵，则

- (A) $E - \alpha\alpha^T$ 不可逆. (B) $E + \alpha\alpha^T$ 不可逆.
(C) $E + 2\alpha\alpha^T$ 不可逆. (D) $E - 2\alpha\alpha^T$ 不可逆.

【答案】A

(6) 设有矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

- (A) A 与 C 相似， B 与 C 相似. (B) A 与 C 相似， B 与 C 不相似.
(C) A 与 C 不相似， B 与 C 相似. (D) A 与 C 不相似， B 与 C 不相似.

【答案】B

(7) 设 A, B, C 为三随机事件, 且 A 与 C 相互独立, B 与 C 相互独立, 则 $A \cup B$ 与 C 相互独立的充分必要条件是

- (A) A 与 B 相互独立. (B) A 与 B 互不相容.
(C) AB 与 C 相互独立. (D) AB 与 C 互不相容.

【答案】C

(8) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则下列结论不正确的是

- (A) $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布. (B) $2(X_n - \bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布.
(C) $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布. (D) $n(X_n - \bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布.

【答案】B

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x + \sqrt{\pi^2 - x^2}) dx =$ _____.

【答案】 $\frac{\pi^3}{2}$

(10) 差分方程 $y_{t+1} - 2y_t = 2^t$ 的通解_____.

【答案】 $C(-2)^t + \frac{t}{2} \cdot 2^t$

(11) 设生产某产品的平均成本 $\bar{C}(Q) = 1 + e^{-Q}$, 其中 Q 为产量, 则边际成本为_____.

【答案】 $1 + (1 - Q)e^{-Q}$

(12) 设函数 $f(x, y)$ 具有一阶连续偏导数, 且

$df(x, y) = ye^y dx + x(1 + y)e^y dy, f(0, 0) = 0$, 则 $f(x, y) =$ _____.

【答案】 xye^y

(13) 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的三维列向量组, 则向量组 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$,

的秩为_____.

【答案】2

(14) 设随机变量 X 的概率分布为 $p\{x=-2\}=\frac{1}{2}p$, $p\{x=1\}=a$, $p\{x=3\}=b$, 若 $EX=0$ 则 $DX=$ _____.

【答案】 $\frac{9}{2}$

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(15) (本题满分 10 分).

$$\text{求 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-te'} dt}{\sqrt{x^3}}$$

(16) (本题满分 10 分).

计算积分 $\iint_D \frac{z^3}{(1+x^2+y^4)^2} dx dy$, 其中 D 是第一象限中曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 x 轴边界的无界区域

(17) (本题满分 10 分).

$$\text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$$

(18) (本题满分 10 分).

已知方程 $\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = k$ 在区间 $(0,1)$ 内有实根, 求 k 的范围

(19) (本题满分 10 分).

若 $a_0=1$, $a_n=0$, $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}(na_n+a_{n+1})(n=1,2,3,\dots)$, $S(x)$ 为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的

和函数

(1) 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径不小于 1;

(2) 证明 $(1-x)S(x)-xS'(x)=0$ $x \in (-1,1)$, 并求 $S(x)$.

(20) (本题满分 11 分).

已知矩阵 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 有 3 个不同的特征值, $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$

(1) 证明: $r(A)=2$

(2) $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, 求 $Ax=\beta$ 的解.

(21) (本题满分 11 分).

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$ 的标准形为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$,

(1) 求参数 a ;

(2) 求把二次型化成标准型的正交矩阵 Q .

(22) (本题满分 11 分).

设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=0\} = P\{X=2\} = \frac{1}{2}$, X 与 Y 相互独立, 且 Y 的概率密度

$$f(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求 $P\{Y, EY\}$

(2) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度函数。

(23) (本题满分 11 分).

某工程师为了解一台天平的精度, 用该天平对一物体的质量做 n 次测量, 该物体的质量 μ 是已知的. 设 n 次测量结果 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 该工程师记录的 n 次测量的绝对误差 $Z_i = |X_i - \mu| (i=1, 2, \dots, n)$, 利用 Z_1, Z_2, \dots, Z_n 估计 σ .

(1) 求 Z_i 的概率密度;

(2) 利用一阶矩求 σ 的矩估计量;

(3) 求 σ 的最大似然估计量.