

2014 考研数学备考重点解析——数列极限存在性的证明与求解

一、利用单调有界准则求极限(先证明极限存在,再求出极限)

单调有界数列必有极限,是判断极限存在的重要准则之一,具体叙述如下: 如果数列是单调增加(减小)的,即满足 $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$ ($a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$), 且存在 $M > 0$ 使得 $|a_n| \leq M$ ($\forall n$), 则 $\{a_n\}$ 极限必存在。

注:有界的数列不一定收敛。这个准则则表明:如果数列不仅有界,而且是单调的,则其极限必定存在。

【例 1】 设 $x_1 = \sqrt{3}, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$, 证明: 数列 $\{x_n\}$ 极限存在并求此极限。

【解析】 由 $0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$ 知, $0 < x_n < 3$,

从而有 $x_n \leq x_{n+1} \leq \sqrt{3}$

而 $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$

$$= \frac{x_n(3-x_n)}{\sqrt{x_n(3-x_n)} + x_n} > x_n.$$

则 $\{x_n\}$ 单调增, 或者由 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \sqrt{\frac{3-x_n}{x_n}} > 1$, 知 $\{x_n\}$ 递增。

又 $\{x_n\}$ 上有界, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 不妨设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

等式 $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$ 两端取极限得

$a = \sqrt{a(3-a)}$, 由此解得 $a = \frac{3}{2}$ 或 $a = 0$ (舍去)

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{3}{2}$.

【例 2】 设 $a_1 = \sqrt{6}, a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

【解法 1】 显然数列 $\{a_n\}$ 递增, 且

$$a_n = \sqrt{6+a_{n-1}},$$

$$a_1 = \sqrt{6} < 3,$$

若 $a_{n-1} < 3$, 则 $a_n = \sqrt{6+a_{n-1}} < 3$, 从而

$a_n < 3$, 即数列 $\{a_n\}$ 上有界, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$,

由 $a_n = \sqrt{6+a_{n+1}}$ 知, $a = \sqrt{6+a}$

解得 $a = 3$, 或 $a = -2$ (舍去)

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$

【解法 2】 直接证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$

由 $a_n = \sqrt{6+a_{n+1}}$ 知

$$|a_n - 3| = \left| \sqrt{6+a_{n+1}} - 3 \right| = \frac{|a_{n+1} - 3|}{\sqrt{6+a_{n+1}} + 3} < \frac{1}{6} |a_{n+1} - 3|$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$.

【例 3】 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = \sin x_n$.

1) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求该极限;

2) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

【解析】 1) 证明: 由 $0 < x_1 < \pi$, $x_{n+1} = \sin x_n$ 知

$$x_{n+1} = \sin x_n < x_n$$

即 $\{x_n\}$ 递减, 且 $x_n > 0$ 下有界, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, 由 $x_{n+1} = \sin x_n$ 知 $x = \sin x$

从而有 $x = 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$$

为此我们考虑极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

则 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$

二、利用夹逼准则求极限

同单调有界准则一样，夹逼准则是证明数列极限存在和求极限的又一重要方法。叙述如下：若对 $\forall n \in N$ ， $a_n \leq b_n \leq c_n$ ，且 $\{a_n\}, \{c_n\}$ 极限存在，则 $\{b_n\}$ 极限存在；若 $\lim_n a_n = \lim_n c_n = c$ ，则 $\lim_n b_n = c$ 。

【例 1】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}$

【解析】由于 $\frac{1}{3} \leq \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} \leq \frac{1}{3}$ ，则 原式 $= \frac{1}{3}$ 。

【例 2】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$ 其中 $a_i \in \mathbb{R}$ 。

【解析】令 $\max_{1 \leq i \leq n} a_i = a$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^2} = 1$ ，则原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^2} = 1$ 。

注：本题的结论是一个常用结论。

【例 3】设 $a_n = \sqrt[n]{\frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^4}}$ 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ；

【解析】显然 $a_n \leq 1$ ，又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^4} = \frac{1}{4}$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{4}$ 。

单调有界准则和夹逼准则是证明数列极限存在的重要方法。当题目中出现的数列为 n 项和形式时，往往用夹逼准则；当出现数列的递推公式时，往往用单调有界准则。